PLUS1 関数と図形

1. (1) $8\sqrt{3}$　(2) $y=2\sqrt{3}x$
(3) $y=2\sqrt{3}x$
(4) $y=16\sqrt{3}-2\sqrt{3}x$

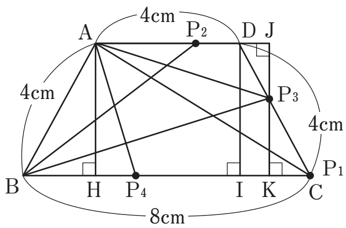
2. (1) $\frac{36}{5}$秒後　(2) $\frac{81}{5}$
(3) $y=\frac{9}{5}x^2$　(4) $y=216-30x$
(5) $\sqrt{10}$秒後，$\frac{33}{5}$秒後

3. (1) $\frac{3}{2}$　(2) $S=\frac{1}{2}t^2-8t+32$
(3) $S=-\frac{1}{2}t^2+4t-4$　(4) $\frac{7}{4}$，5

4. (1) $y=\frac{1}{2}x^2$　(2) 5秒後

5. (1) $(12\pi,\ 0)$　(2) 180°，$(6\pi,\ 12)$
(3) 60°，300°
(4) $(7\pi+3,\ 6+3\sqrt{3})$

解説♪



1. (1) 図のように，2点A，Dから辺BCにそれぞれ垂線AH，DIを引くと，四角形AHIDは長方形になり，HI＝AD＝4　また，△ABH≡△DCIとなるから，BH＝CI＝$\frac{1}{2}$(BC－HI)＝$\frac{1}{2}$×(8－4)＝2　よって，△ABHで三平方の定理より，AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$＝$2\sqrt{3}$　点Pは毎秒2cmの速さで動くから，頂点Aを出発してから4秒後までに，2×4＝8(cm)進む。したがって，AD＋DC＝4＋4＝8より，点Pは4秒後に頂点Cにある(図の点P_1)。このとき，y＝△ABP_1＝△ABC＝$\frac{1}{2}$×BC×AH＝$\frac{1}{2}$×8×$2\sqrt{3}$＝$8\sqrt{3}$(cm²)

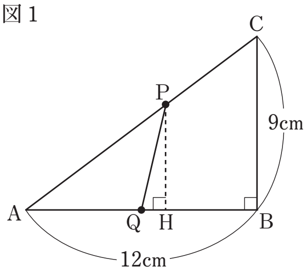
(2) 2×2＝4より，点Pは2秒後に頂点Dにあるから，$0\leqq x\leqq 2$のとき，点Pは辺AD上にある(図の点P_2)。このとき，$AP_2=2x$より，△ABP_2＝$\frac{1}{2}$×AP_2×AH＝$\frac{1}{2}$×$2x$×$2\sqrt{3}$＝$2\sqrt{3}x$だから，$y=2\sqrt{3}x$

(3) (1)，(2)より，$2\leqq x\leqq 4$のとき，点Pは辺DC上にある(図の点P_3)。このとき，AD＋DP_3＝$2x$だから，DP_3＝$2x-4$，P_3C＝$8-2x$　図のように，点P_3から直線AD，BCにそれぞれ垂線P_3J，P_3Kを引くと，(1)より△ABHは3辺の比が1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形だから，∠P_3DJ＝∠DCI＝∠ABH＝60°となり，△P_3DJ，△P_3CKは3辺の比が1：2：$\sqrt{3}$の直角三角形となる。これより，$P_3J=\frac{\sqrt{3}}{2}DP_3=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-4)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，$P_3K=\frac{\sqrt{3}}{2}P_3C=\frac{\sqrt{3}}{2}(8-2x)=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x$　よって，△ABP_3＝〔台形ABCD〕－△AP_3D－△BP_3C＝$\frac{1}{2}\times(4+8)\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times4\times(\sqrt{3}x-2\sqrt{3})-\frac{1}{2}\times8\times(4\sqrt{3}-\sqrt{3}x)=12\sqrt{3}-2\sqrt{3}x+4\sqrt{3}-16\sqrt{3}+4\sqrt{3}x=2\sqrt{3}x$より，$y=2\sqrt{3}x$

(4) 2×8＝16，AD＋DC＋CB＝4＋4＋8＝16より，点Pは8秒後に頂点Bにあるから，$4\leqq x\leqq 8$のとき，点Pは辺CB上にある(図の点P_4)。このとき，AD＋DC＋CP_4＝$2x$だから，BP_4＝$16-2x$　よって，△ABP_4＝$\frac{1}{2}\times(16-2x)\times2\sqrt{3}=16\sqrt{3}-2\sqrt{3}x$より，$y=16\sqrt{3}-2\sqrt{3}x$

2. ⑴　図1で，△ABCは∠B＝90°の直角三角形だから，三平方の定理より，$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}=15$　2点P，Qが出発してから t 秒後に出会うとする。このとき，2点P，Qが動いた距離の和は△ABCの周の長さと等しくなる。点Pの速さが毎秒3cm，点Qの速さが毎秒2cmだから，$3t+2t=12+9+15$ が成り立ち，これを解くと，$5t=36$，$t=\frac{36}{5}$ となり，$\frac{36}{5}$ 秒後である。

図1

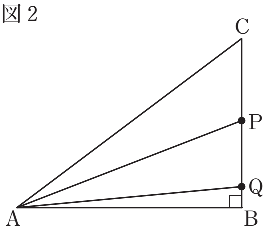


⑵　3秒間で，点Pは $3\times3=9$(cm)，点Qは $2\times3=6$(cm)動くから，3秒後，点Pは辺AC上，点Qは辺AB上にあり，AP＝9，AQ＝6　図1で，点Pから辺ABに垂線PHを引くと，△AHP∽△ABCより，PH：CB＝AP：AC＝9：15＝3：5となるから，$\mathrm{PH}=\frac{3}{5}\mathrm{CB}=\frac{3}{5}\times9=\frac{27}{5}$　よって，$y=\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{27}{5}=\frac{81}{5}$ (cm²)

⑶　2点P，Qがそれぞれ頂点C，頂点Bにあるのは，$\frac{15}{3}=5$(秒)後，$\frac{12}{2}=6$(秒)後だから，点Pが辺AC上を動いているとき，$0\leqq x\leqq5$ であり，点Qは辺AB上にある。図1で，AP＝$3x$ であり，△AHP∽△ABCだから，PH：CB＝AP：AC＝$3x$：15＝x：5となり，$\mathrm{PH}=\frac{x}{5}\mathrm{CB}=\frac{x}{5}\times9=\frac{9}{5}x$　よって，AQ＝$2x$ より，$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{PH}=\frac{1}{2}\times2x\times\frac{9}{5}x=\frac{9}{5}x^2$ と表せるから，$y=\frac{9}{5}x^2$

⑷　点Qが頂点Bにあるのは6秒後で，2点P，Qが出会うのは $\frac{36}{5}$ 秒後だから，2点P，Qがともに辺BC上を動いているのは，$6\leqq x\leqq\frac{36}{5}$ のときである。図2で，AC＋CP＝$3x$，AB＋BQ＝$2x$ だから，PQ＝(AB＋BC＋AC)－(AC＋CP)－(AB＋BQ)＝$36-3x-2x=36-5x$　よって，$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}\times\mathrm{PQ}\times\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\times(36-5x)\times12=216-30x$ と表せるから，$y=216-30x$

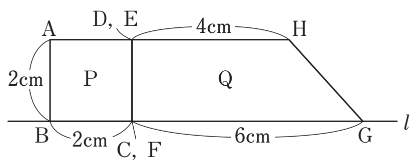
図2



⑸　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}=\frac{1}{2}\times12\times9=54$ だから，y の値が△ABCの面積の $\frac{1}{3}$ より，$y=54\times\frac{1}{3}=18$　$0\leqq x\leqq5$ のとき，⑶より $y=\frac{9}{5}x^2$ であるから，$18=\frac{9}{5}x^2$ が成り立ち，$x^2=10$，$x=\pm\sqrt{10}$ となり，$x=\sqrt{10}$　$6\leqq x\leqq\frac{36}{5}$ のとき，⑷より，$18=216-30x$ が成り立ち，$30x=198$，$x=\frac{33}{5}$　これは，$6\leqq x\leqq\frac{36}{5}$ を満たすので，適する。よって，$\sqrt{10}$ 秒後と $\frac{33}{5}$ 秒後である。なお，$5\leqq x\leqq6$ のときは，$y=18$ となることはない。

3. ⑴　図1のように，正方形PをABCD，台形QをEFGHとすると，$t=\frac{3}{4}$ のとき，正方形Pは右に $1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ (cm)移動するから，PとQが重なる部分は，図2で影をつけた長方形EFCDとなる。このとき，$\mathrm{FC}=\frac{3}{4}$ だから，$S=\mathrm{FC}\times\mathrm{EF}=\frac{3}{4}$

図1



$\times 2 = \dfrac{3}{2}$ (cm²)

(2)　$t=6$ のとき正方形Ｐは $1\times 6=6$ (cm)，$t=8$ のとき正方形Ｐは $1\times 8=8$ (cm) 右へ移動する。図１で，$\mathrm{BC}+\mathrm{FG}=2+6=8$ だから，$t=6$ のときは点Ｃと点Ｇが，$t=8$のときは点Ｂと点Ｇが重なる。よって，$6<t\leqq 8$ のとき，図３のように，辺HGと辺ABの交点をＩとすると，ＰとＱが重なる部分は，影をつけた△IBGとなる。点Ｈから辺FGに垂線HH′を引くと，$\mathrm{HH'}=2$，$\mathrm{H'G}=\mathrm{FG}-\mathrm{FH'}=6-4=2$ だから，△HH′Gは直角二等辺三角形となり，△IBGも直角二等辺三角形である。さらに，$\mathrm{FC}=1\times t=t$ より，$\mathrm{FB}=\mathrm{FC}-\mathrm{BC}=t-2$ だから，$\mathrm{IB}=\mathrm{BG}=\mathrm{FG}-\mathrm{FB}=6-(t-2)=8-t$　したがって，$\triangle\mathrm{IBG}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{BG}\times\mathrm{IB}=\dfrac{1}{2}\times(8-t)\times(8-t)=\dfrac{1}{2}t^2-8t+32$ より，$S=\dfrac{1}{2}t^2-8t+32$ (cm²)

図２

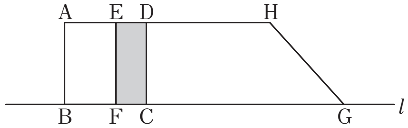
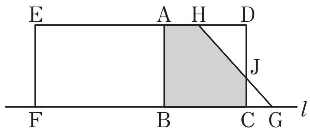


図３

(3)　$t=4$ のとき，正方形Ｐは $1\times 4=4$ (cm) 右へ移動し，$\mathrm{EH}=4$ だから，$4<t\leqq 6$ のとき，図４のように，辺HGと辺DCの交点をＪとすると，ＰとＱが重なる部分は，影をつけた五角形ABCJHとなり，正方形ABCDから△HDJを除いた図形である。$\mathrm{ED}=\mathrm{FC}=t$ より，$\mathrm{HD}=\mathrm{ED}-\mathrm{EH}=t-4$　また，△HDJは直角二等辺三角形　よって，〔五角形ABCJH〕$=2\times 2-\dfrac{1}{2}\times(t-4)\times(t-4)=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$ より，$S=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$ (cm²)

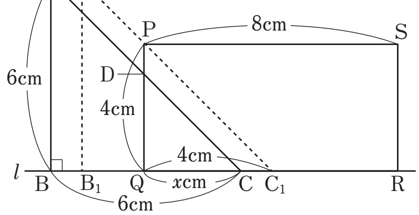
図４



(4)　$0<t\leqq 2$ のとき，$\mathrm{FC}=t$ より，$S=2t$　よって，$S=\dfrac{7}{2}$のとき，$\dfrac{7}{2}=2t$ より，$t=\dfrac{7}{4}$となり，$0<t\leqq 2$ だから適する。また，$2<t\leqq 4$ のとき，ＰとＱが重なる部分は正方形Ｐとなり，$S=4$だから，$S=\dfrac{7}{2}$となることはない。次に，(3)より，$4<t\leqq 6$ のとき，$S=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$ だから，$\dfrac{7}{2}=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$，$t^2-8t+15=0$，$(t-3)(t-5)=0$ より，$t=3$，5　$4<t\leqq 6$ だから，$t=5$　さらに，$6<t\leqq 8$ のとき，図３で，$S<\triangle\mathrm{HH'G}$，$\triangle\mathrm{HH'G}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$ より，$S<2$ なので，$S=\dfrac{7}{2}$になることはない。以上より，$t=\dfrac{7}{4}$，5

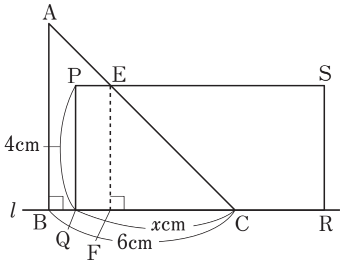
4．(1)　図１のように，$x=4$ のときの△ABCを$\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$とすると，$\mathrm{QC_1}=1\times 4=4$，$\mathrm{PQ}=\mathrm{QC_1}=4$ より，$\triangle\mathrm{PQC_1}$は直角二等辺三角形となるから，$\angle\mathrm{PC_1Q}=\angle\mathrm{A_1C_1B_1}=45°$ となり，点Ｐは辺$\mathrm{A_1C_1}$上の点となる。よって，$0\leqq x\leqq 4$ のとき，図１のように，辺ACと辺PQは交わり，その交点をＤとすると，△ABCと長方形PQRSの重なっている部分は△DQCとなる。△DQCは直角二等辺三角形で，$\mathrm{DQ}=\mathrm{QC}=1\times x=x$ より，$\triangle\mathrm{DQC}=\dfrac{1}{2}\times x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$ となるから，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ (cm²)

図１



(2)　(1)より，$x=4$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times4^2=8$ だから，$0\leqq x\leqq4$ のとき，重なっている部分の面積が 12cm^2 となることはない。次に，図2のように，辺PQが△ABCの内部にあるとき，辺ACと辺PSの交点をEとすると，△ABCと長方形PQRSの重なっている部分は台形PQCEとなる。BC＝6だから，6÷1＝6より，このとき $4\leqq x\leqq6$ である。図2のように，点Eから直線 l に垂線EFを引くと，FC＝EF＝PQ＝4より，PE＝QF＝QC－FC＝$x-4$ となるから，台形PQCEの面積は，$\frac{1}{2}\times\{(x-4)+x\}\times4=4x-8$ と表せる。よって，$4x-8=12$ とすると，$x=5$　これは $4\leqq x\leqq6$ を満たすので，適する。$6\leqq x\leqq8$ のときは，$y>12$ である。したがって，重なっている部分の面積が 12cm^2 となるのは，動き始めてから5秒後

図2



5. (1)　図1のように，円が360°回転したときの点Pは，x 軸上にあり，OPの長さは半径6の円周の長さに等しい。よって，OP＝$2\pi\times6=12\pi$ より，P$(12\pi,\ 0)$

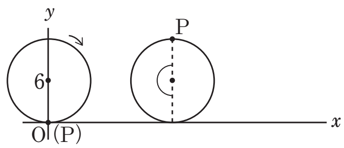
図1

(2)　図2のように，点Pの y 座標が最も大きくなるのは，円が180°回転したときである。そのときの点Pの y 座標は $6\times2=12$

また，点Pの x 座標は円周の $\frac{1}{2}$ に等しいから，$12\pi\times\frac{1}{2}=6\pi$

よって，P$(6\pi,\ 12)$

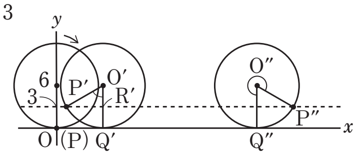
図2



(3)　図3のように，点Pの y 座標が3となるのは，2回ある。

1回目に点Pの y 座標が3となるときの円の中心をO′，x 軸との接点をQ′，点Pの位置をP′，直線 $y=3$ とO′Q′ の交点をR′ とすると，R′Q′＝3よりO′R′＝6－3＝3，O′P′＝6　このとき，∠P′R′O′＝90°だから，△O′P′R′ はO′R′：O′P′：P′R′＝1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形となり，∠P′O′Q′＝60°より，円が60°回転したときである。同様に，図3のように，2回目について，P″，Q″，O″ を定めると，∠P″O″Q″＝60°より，円が360°－60°＝300°回転したときとなる。

図3



(4)　図4のように，円が210°回転したときの円の中心をA，x 軸との接点をQ，半径QAの延長に点Pから引いた垂線をPBとする。∠PAB＝210°－180°＝30°より，△APBはPB：AP：AB＝1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形　よって，AP＝6より，PB＝$\frac{1}{2}$AP＝$\frac{1}{2}\times6=3$ となり，OQ＝$2\pi\times6\times\frac{210°}{360°}=7\pi$ だから，点Pの x 座標はOQ＋PB＝$7\pi+3$　また，AB＝$\sqrt{3}$PB＝$\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$，AQ＝6より，点Pの y 座標はAQ＋AB＝$6+3\sqrt{3}$　よって，P$(7\pi+3,\ 6+3\sqrt{3})$

図4